# 高Ka时有限长刚性圆柱的反向散射
# ——几何衍射理论方法

谢云波

(中国科学院声学所东海研究站)

## 一、引　　言

人们早已成功地运用波动理论求出直边和楔的衍射场精确解[1]。但是，迄今为止尚未求得柱体、锥体等简单形状的有限尺度目标的衍射场精确解。这是因为，在大波数情况下，波动理论难以处理来自柱体或锥体棱边的衍射波。而大多数实际目标其表面都存在尖锐的棱边或曲率半径为零的尖顶。所以，波动理论具有很大的局限性。

自从五十年代J. B. Keller提出几何衍射理论(GTD)以来[2]，该理论被运用到许多形状复杂物体的衍射场计算中，并获得很大成功。GTD具有计算简单、物理图象清晰、便于应用等优点。本文应用GTD求解了有限长刚性圆柱对平面入射声的反向散射；对GTD解在特定区域的发散现象进行了处理，并对部分理论结果作了实验验证。

## 二、问题的分析

设一有限长刚性圆柱置于均匀介质中。一平面波与柱轴成$\varphi_0$角入射至柱体上。我们选用极坐标系，令坐标原点与柱中心重合，见图1。

为方便起见，假设入射波为单位振幅平面波。则$P(\rho,\ \theta)$处入射波可表为：

$$U_i(\rho,\ \theta)=e^{-ik\rho\cos(\theta-\varphi_0)} \tag{1}$$

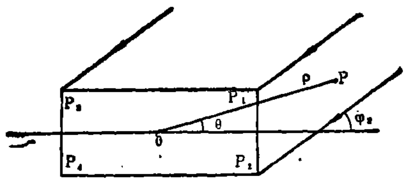


图1　入射波与圆柱的几何关系柱长为$h$，半径为$a$

式中已略去时间因子$e^{-i\omega t}$。

现讨论$0°\leqslant\varphi_0\leqslant90°$区域的圆柱反向散射场空间分布。其余区域的场由问题的对称性即知。具体分析如下：

1．据GTD边缘衍射定律易知[2,3]，当柱体受到入射波照射时，柱端的棱边产生衍射场。然而，从入射声线方向看去，只有$P_1$、$P_2$和$P_3$三点发出的部分衍射声线能够直接回到接收器。因为仅这三点处的棱边切线与入射声线垂直，而棱边上其余点所发出的衍射则呈锥状散射到其他方向去了。如图2所示。$P_4$由于处在影区中，故亦无反向贡献。

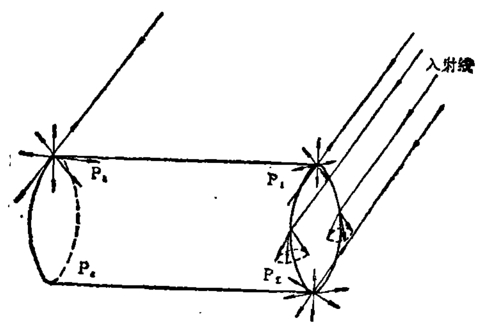


图2　柱端面上的衍射线分布

2．我们不计二次以上衍射声线的贡献。

由GTD知，$P_1$发出的一次衍射线，尚可沿着柱端面入射到对面的$P_2$点，被$P_2$再衍射一次后回到接收器。这条声线称为二次衍射线。对$P_2$亦有同样情况。从能量分配观点看，入射声能经$P_1$一次衍射后，仅有一小部分能量传到$P_2$受到再衍射，而这部分能量中又只是一小部分能回到接收器。所以，二次衍射线携回的能量比一次衍射线携回的能量至少小一个量级。因此，可以忽略二次及更高次的衍射。

3．由GTD公式，衍射场可表为[3]：

$$U_D(S,\varphi_2)=D(\varphi_1,\varphi_2)\cdot U_i(P_i)[(1+\rho_i^{-1}\cdot S)\cdot S]^{-1/2}\cdot e^{iks} \quad (2)$$

其中：

$$D(\varphi_1,\ \varphi_2)=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{n\cdot\sqrt{2\pi k}}\cdot\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{n}\right)^{-1}\mp\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{n}\right)^{-1}\right] \quad (3)$$

称上式为衍射系数。(实为D的一级近似)

(2)、(3)两式中各量意义如下：

$U_i(P_i)$：$P_i$处的入射场。

$U_D(S,\varphi_2)$：表示在观察点$(S,\ \varphi_2)$接收到的、$P_i$发出的衍射场。

$\varphi_1$：入射声线逆向与柱端面之夹角。见图3。

$\varphi_2$：衍射声线与柱端之夹角。见图3。

$n$：$(2-n)\pi$表示在衍射点$P_i$附近，柱端面与其侧面的夹角。对于直圆柱，$(2-n)\pi=\pi/2$，即$n=3/2$。

$\rho_i$：衍射点$P_i$至另一焦散点的有向距离。从$P_i$出发向焦散点作有向线段$\rho_i$，若线段行进方向与$P_i$发出的反向衍射线传播方向相反，则$\rho_i$取正；否则取负。

$S$：观察点到相应衍射点$P_i$的距离。

"$\mp$"：正号对应刚性柱；负号对应绝对软柱。

4．$(S,\ \varphi_2)$处的总声场应为：

$$U=U_g+U_D$$

其中$U_g$为几何场，包括入射场和几何反射场。$U_D$为几何衍射场。在反向散射问题中不考虑入射场，故总声场为：几何反射场加几何衍射场。但在柱反射问题中，仅当$\varphi_0=0°$和$90°$时方能收到几何反射场，对于其他方向仅能收到衍射场$U_D$。

下面求解$U_D$。

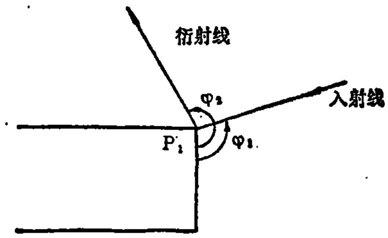


图3 $\varphi_1$、$\varphi_2$的定义

## 三、三个衍射点的回波

1．$P_1$的反向散射贡献

如图4所示。$P_1$的坐标为：

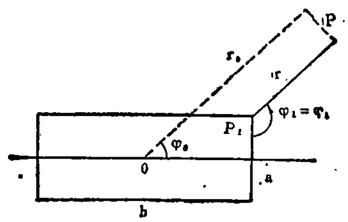


图4 $P_1$的几何位置

$$\rho=[a^2+(h/2)^2]^{1/2}$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2a}{h}\right)$$

代入(1)式中得：

$$U_i(P_1)=\exp\left[-ik\cdot\sqrt{a^2+(h/2)^2}\cdot\cos\left(\varphi_0-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2a}{h}\right)\right)\right]$$

$r_1$为$P_1$至观察点$P$的距离。由图4易知：

$$r_1=r_0-\left(\frac{h}{2}\cos\varphi_0+a\cdot\sin\varphi_0\right)$$

对应于$P_1$的$\rho_1$为[3]：

$$\rho_1=a/\sin\varphi_0$$

由此可得图5。即：从$P_1$发出的反向衍射线，

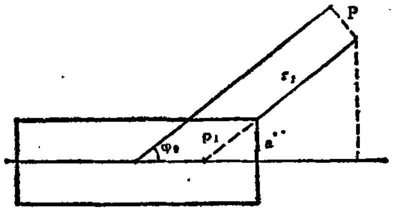


图 5　$\rho_1$的几何意义

其焦散点位于沿入射方向过$P_1$的沿长线与圆柱轴线的交点处。由图 5 得：

$$\frac{r_1+\rho_1}{\rho_1}=\frac{r_1+\rho_1}{a}\cdot\sin\varphi_0$$

在远场条件下，$r_1+\rho_1\simeq r_0$，故有：

$$\frac{r_1+\rho_1}{\rho_1}\simeq\frac{r_0\cdot\sin\varphi_0}{a} \qquad (4)$$

此处$r_1$即为(2)式中的$S$。故(2)式中的扩张因子为：

$$[(1+\rho_1^{-1}\cdot S)S]^{-1/2}=\left[\frac{\rho_1}{(\rho_1+S)S}\right]^{1/2}$$

$$\simeq\left[\frac{a}{r_0\cdot r_1\cdot\sin\varphi_0}\right]^{1/2}$$

另外，对于反向散射来说$\varphi_1=\varphi_2=\pi/2+\varphi_0$，见图 4 。代入(3)式得：

$$D=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{n\cdot\sqrt{2\pi k}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)^{-1}+\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\varphi_0+\pi}{n}\right)^{-1}\right]$$

将上述关系代入(2)式得：

$$U_1(r_1,\ \varphi_0)=\sqrt{\frac{a}{r_0\cdot r_1}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n\cdot\sqrt{2\pi k\sin\varphi_0}}\cdot\exp\left\{ik\left(r_1-\sqrt{a^2+h^2/4}\cdot\cos\left(\varphi_0-\mathrm{tg}^{-1}\frac{2a}{h}\right)\right)+i\frac{\pi}{4}\right\}\cdot\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)^{-1}+\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\varphi_0+\pi}{n}\right)^{-1}\right] \qquad (5)$$

这就是$P_1$的回波。现分析一下$U_1$的奇异性。$\varphi_0=0°$是$U_1$的奇异点。此时入射波迎着端面入射，柱轴是焦散线。由于$P$点位于焦散线上，故GTD解发散。这体现在(5)式中存在$1/\sqrt{\sin\varphi_0}$这个因子。此外，由于$\varphi_0=0°$是$P_1$几何反射域的边界，故$D$的渐近式(3)不再适用。表现在：

$$\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\varphi_0+\pi}{n}\right)^{-1}\Big|_{\varphi_0\to 0}\longrightarrow\infty。$$

$\varphi_0=90°$亦是$U_1$的奇异点。这对应于正横入射。此时$P$点也位于$P_1$几何反射域的边界，故(3)式又发散。这表现在：

$$\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos^2\frac{\varphi_0+\pi}{n}\right)^{-1}\Big|_{\substack{\varphi_0\to 90°\\ n=3/2}}\longrightarrow\infty$$

综上所述，$U_1$在$\varphi_0=0°$和$90°$两处均发散。但导致发散的原因有两个，后面将采取不同的方法加以处理。

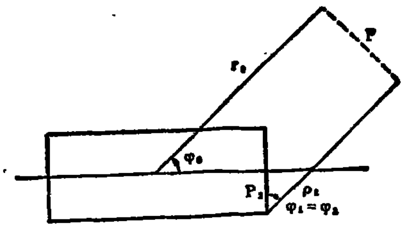


图 6　$\rho_2$的几何意义

**2．$P_2$的反向散射贡献**

$P_2$的坐标：

$$\rho=[a^2+h^2/4]^{1/2}$$

$$\theta=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{2a}{h}$$

重复上节推导可得：

$$U_2(r_2,\ \varphi_0)=\sqrt{\frac{a}{r_0\cdot r_2}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n\cdot\sqrt{2\pi k\sin\varphi_0}}\cdot\exp\left\{ik\left(r_2-\sqrt{a^2+h^2/4}\cdot\cos\left(\varphi_0+\mathrm{tg}^{-1}\frac{2a}{h}\right)\right)-i\frac{\pi}{4}\right\}\cdot\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)^{-1}+\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\varphi_0-\pi}{n}\right)^{-1}\right] \qquad (6)$$

这就是$P_2$点的回波。其中：

$$r_2=r_0-\left(\frac{h}{2}\cos\varphi_0-a\sin\ \varphi_0\right);$$

$$\rho_2=-a/\sin\varphi_0$$

$U_2$仅在$\varphi_0=0°$发散，与$U_1$情况相同。但是，90°并非$U_2$的奇异点。因为正横入射时，入射波仅被$P_1$处楔反射，而$P_2$处楔并不反射入射波。所以，$\varphi_0=90°$不是$P_2$的反射域边界，故$U_2$在此并不发散。

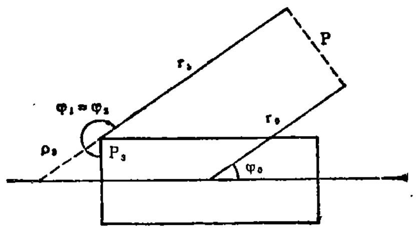


图7　$\rho_3$的几何意义

3．$P_3$的反向散射贡献

$P_3$的坐标：

$$\rho=(a^2+h^2/4)^{1/2}$$

$$\theta=\pi-\mathrm{tg}^{-1}\frac{2a}{h}$$

同理可得：

$$U_3(r_3,\ \ \varphi_0)=\sqrt{\frac{a}{r_0\cdot r_3}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n\cdot\sqrt{2\pi k\sin\varphi_0}}$$

$$\cdot\exp\left\{ik\left(r_3+\sqrt{a^2+h^2/4}\cdot\cos\left(\varphi_0+\mathrm{tg}^{-1}\frac{2a}{h}\right)\right)+i\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)^{-1}+\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\varphi_0}{n}\right)^{-1}\right]\quad(7)$$

这就是$P_3$的回波。其中：

$$r_3=r_0+\left(\frac{h}{2}\cdot\cos\varphi_0-a\sin\varphi_0\right);$$

$$\rho_3=a/\sin\varphi_0$$

参见图7。

$U_3$在$\varphi_0=0°$发散，因为$P$点(收发点)位于焦散轴上。但衍射系数并不发散，这与$U_2$在$\varphi_0=90°$情况类似。$U_3$在90°附近发散，因为$\varphi_0=90°$是$P_3$的反射域边界，故$D$发散。

(5)、(6)和(7)三式给出了柱体上可贡献回波的三个衍射点的反向散射场。对于收发点$P$来说，所收到的总衍射场即为三者之和：

$$U_D=U_1+U_2+U_3$$

## 四、GTD解发散的处理

(5)—(7)三式表明，GTD解在焦散轴处($\varphi_0=0°$)和几何反射区边界处($\varphi_0=0°$及90°)是发散的。故在这两个区域附近GTD解不适用，必须对其进行处理。

1．轴线附近区域的场

我们首先利用近轴、远场条件导出$\varphi_0=0°$附近GTD解的形式。参见图8

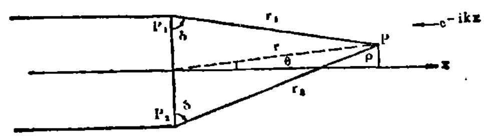


图8　轴线附近$P$点与柱的几何关系

设观察点$P$甚靠近柱轴，以致只能收到$P_1$、$P_2$的衍射线，而$P_3$的贡献收不到。此外，$P$距柱体甚远，但不与发射点重合，使$\delta\simeq\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$。

在上述条件下，仿前节推导，可得$\varphi_0=0°$附近GTD解的形式为：

$$U(P)=\frac{2a\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot e^{ik(r\cos\theta\sin\delta+a\cos\delta)}}{n\cdot r\cdot\sqrt{2\pi k\rho\cos\delta}}$$

$$\cos\left(k\rho\cos\delta-\frac{\pi}{4}\right)\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)^{-1}+\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\delta}{n}\right)^{-1}\right]\quad(8)$$

可见，当$P$趋近轴线时，$\rho\to0$。由于$\frac{1}{\sqrt{\rho\cos\delta}}\longrightarrow\infty$，上式发散；当$P$趋近发射点时，$r\to\infty$。由于$\delta\to\frac{\pi}{2}$，衍射因子发散。

我们首先消除焦散性奇异因子$\frac{1}{\sqrt{\rho\cos\delta}}$

为此，考虑Bessel 函数的大宗量渐近式：

$$J_0(k\rho\cos\delta)=\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho\cos\delta}}\cdot\cos\left(k\rho\cos\delta-\frac{\pi}{4}\right) \tag{9}$$

若$\rho\to 0$，上式右端发散。对比(8)式易知：这两式在$\rho\to 0$时，其发散性质一样。由此得到(8)式的修正因子$F_0$：

$$F_0=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi k\rho\cos\delta}\cdot sec\left(k\rho\cos\delta-\frac{\pi}{4}\right)\cdot J_0(k\rho\cos\delta) \tag{10}$$

与(8)式相乘得：

$$U(P)=\frac{a\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{n\cdot r}\cdot e^{ik(r\cos\theta\sin\delta+a\cos\delta)}\cdot J_0(k\rho\cos\delta)\cdot\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)^{-1}+\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\delta}{n}\right)^{-1}\right] \tag{11}$$

这就消除了焦散奇异因子。

现考察$D$中的发散因子：$\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\delta}{n}\right)^{-1}\xrightarrow[\delta\to\pi/2]{}\infty$。我们令$r\to\infty$的速度与$D\to\infty$的速度相同，即：$\cos\delta=a/r$。同时考虑镜反射波$U_g=e^{ikx}$，总波场应为：$U=U_g+U_D$。在$ka\gg1$条件下，可得：

$$U(P)=\frac{-ika^2J_0(ka\sin\varphi_0)}{2r}\cdot e^{ikr} \tag{12}$$

上式就是GTD解经处理后于$\varphi_0=0°$附近区域的解。

2．正横方向时对GTD解的处理

正横入射时($\varphi_0=90$)，柱侧面的镜反射在回波中占优势，故来自$P_1$、$P_3$的衍射波可略去不计。由于反讨论的问题满足高频、远场条件，可以利用Kirchhoff积分公式求出侧面贡献。

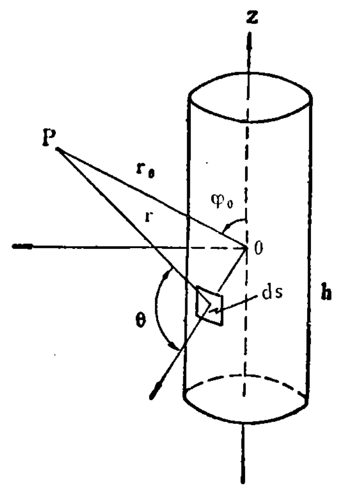


图9　Kirchhoff积分所用坐标

如图9建立坐标。在刚柱条件下，由均匀介质中的Kirchhoff积分公式[4]得：

$$U_s=\frac{-i}{\lambda}\int_S\frac{\cos\theta}{r}\cdot e^{-2ikr}ds \tag{13}$$

$\lambda$为波长。式中各几何量由图9给出。我们利用三井田的近似计算法[5]，求得在$\varphi_0=90°$，$ka\gg1$条件下的回波解为：

$$U_s=\frac{h}{r_0}\cdot\sqrt{\frac{a}{2\lambda}}\cdot e^{i\varphi} \tag{14}$$

此处未考虑蠕波贡献。

当$\varphi_0=90°$时，我们用(14)式取代发散的GTD解。

## 五、实验与理论的对比

我们利用SC-1型声场测试小水槽，进行了圆柱形目标反向散射模拟实验。采用的目标有不锈钢柱、黄铜柱和硬铝柱。实验与理论的对比如图10～图13所示。图中横坐标为$\varphi_0$。图12仅反映$P_1$的回波。各结果均已用$\varphi_0=0°$处回波归一。

## 六、讨论与结论

1．由实验结果看，理论与实验大致相

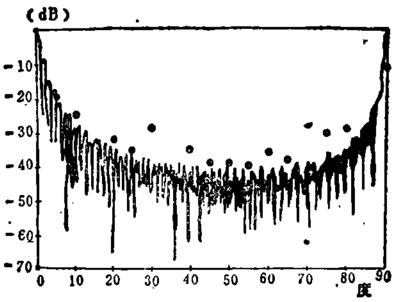


图10 不锈钢柱 $k=69$

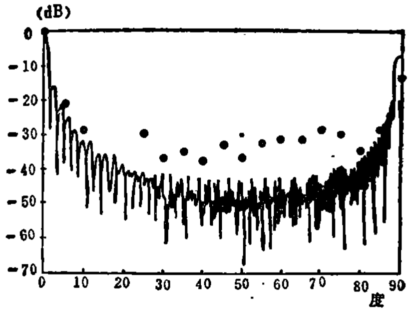


图11 黄铜柱$ka=48$

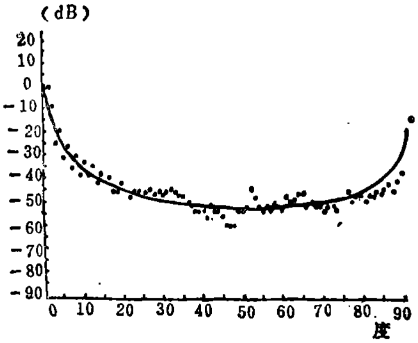


图12 黄铜柱$ka=36$(来自$P_1$的回波强度)

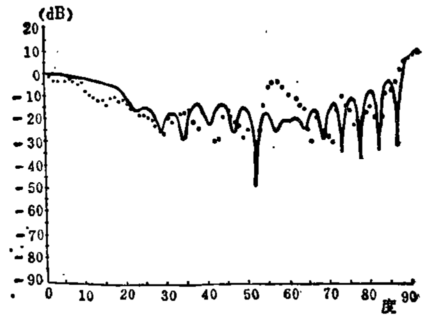


图13 铁柱$ka\simeq4$

符。实验值未显示剧烈的起伏。因为理论曲线是在计算机上以 0.2 度步长绘出，而实验装置调节精度只到“度”。另外，收发换能器自身的开角为1.5°，故每次的读数都是该域内的平均值。

2. 0°与90°附近实验值与理论值吻合得较好。而在45°附近实验值高于理论值。这可能是接收系统未加选频电路致使信噪比较低所致。

3. 我们曾对同一个目标的反向散射场用GTD 和 Kirchhoff 近似两种理论分别进行了计算。并绘出相应的目标指向性图。发现：两条理论曲线在相位上相当一致，在幅度上GTD比 Kirchhoff 近似平均高出约 5 分贝。此外，前者结果比后者更精细。

4. 尽管GTD 是大波数条件下的近似理论，但实验显示，即使 $ka\sim4$ 时，它仍能给出较好的结果。如图13所示。

## 参 考 文 献

[1] Skudrzyk. E. “The Foundations of Acoustics” Spring-Verlag, wien, New York 1971, P557

[2] Keller. J. B. “Diffraction by an aperture”. J. J. Appl. Phys., Vol. 28. 1957. P426～444

[3] Keller. J. B. “Geometrical Theory of Diffraction”. J. Opt. Soc. of America, Vol.52. 1962. P 116～130

[4] 汪德昭，尚尔昌合著《水声学》，科学出版社，1981年 P362

[5] 三井田惇郎·浮贝雅裕，“有限长刚圆柱による球面波の反射”日本音响学会志，36卷 4 号，1980